

§ 2. Ток и напряжение. Периодический свободный ток может вызывать большие падения напряжения на индуктивности и емкости.

Рассмотрим следующий практический пример. Для облегчения замыкания индуктивной цепи и для устранения искрения между контактами выключателя в цепь включается конденсатор, как показано на фиг. 42.

Гл. 5. Свободные токи и напряжения в колебательных контурах

55

После внезапного отключения батареи образуется колебательный контур, которому будет протекать лишь свободный ток, изменяющийся от первоначального значения I до нуля. В этой главе мы принимаем, что до отключения напряжение на конденсаторе E было мало, а это позволяет считать начальную фазу тока γ [см. выражение (5.12)] равной нулю.

Свободная составляющая падения напряжения на индуктивности, пропорциональная производной тока по времени, на основании выражения (5.13) равна

$$e_L = L \frac{di}{dt} = LIe^{-t/2T} \left(-\gamma \sin \omega t - \frac{1}{2T} \cos \omega t \right). \quad (5.17)$$

Заменив синусоидальную и косинусоидальную функции времени одной синусоидальной функцией, сдвинутой по фазе, получаем

$$e_L = -LI \sqrt{\gamma^2 + \left(\frac{1}{2T} \right)^2} e^{-t/2T} \sin(\omega t + \delta). \quad (5.18)$$

Начальная фаза δ определяется из соотношения

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{2\omega T} = \frac{R}{2\omega L}. \quad (5.19)$$

Квадратный корень в выражении (5.18) можно упростить. Действительно из формулы (5.14) следует, что он равен $1/\sqrt{LC}$. Следовательно, напряжение на индуктивности окончательно равно

$$e_L = -I \sqrt{\frac{L}{C}} e^{-t/2T} \sin(\omega t + \delta). \quad (5.20)$$

В силу соотношения (5.4), напряжение на конденсаторе равно сумме напряжений на индуктивности и на активном сопротивлении, взятой с обратным знаком. Из выражений (5.17) и (5.13) получаем

$$e_C = -e_L - Ri = LIe^{-t/2T} \left(\gamma \sin \omega t + \frac{1}{2T} \cos \omega t - \frac{R}{L} \cos \omega t \right). \quad (5.21)$$

Воспользовавшись соотношением (5.9), объединим внутри скобок косинусоидальные члены и получим

$$e_C = LIe^{-t/2T} \left(\gamma \sin \omega t - \frac{1}{2T} \cos \omega t \right). \quad (5.22)$$

Синусоидальный и косинусоидальный члены сполна можно объединить в один синусоидальный член с начальной фазой δ_0 , определяемой также из соотношения (5.19). Таким образом, напряжение на емкости окончательно равно

$$e_C = \frac{1}{C} I \sqrt{\frac{L}{C}} e^{-t/2T} \sin(\omega t - \delta_0). \quad (5.23)$$

Выражения (5.20) и (5.23) для напряжений на индуктивности и на емкости очень сходны между собой и отличаются лишь общим знаком и знаком перед начальной фазой δ . Последняя мала, если мало активное сопротивление [см. соотношение (5.19)]. Оба эти напряжения изменяются по синусоидальному закону, и то время как ток изменяется по косинусоидальному закону [см. выражение (5.13)]. Если пренебречь углом δ , то можно сказать, что оба напряжения сдвинуты по отношению к току на четверть периода и убывают по одинаковому с ним показательному закону. Величины этих напряжений можно получить умножением тока на $\sqrt{L/C}$ — важный параметр, названный нами выше волновым сопротивлением контура. На фиг. 43 показано изменение во времени напряжения

1. Простые электрические цепи

на конденсаторе, соответствующего току, кривая которого изображена на фиг. 41. На фиг. 44 представлена осциллограмма постепенно затухающих свободных колебаний, возбужденных в колебательном контуре внешним воздействием.

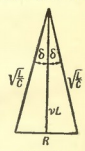
Угол δ , равный половине угла сдвига фаз между напряжениями e_L и e_C , можно определить аналитически при помощи соотношения (5.19). Кроме того, его можно найти и простым геометрическим построением, представляющим с исключительной наглядностью соотношение между напряжениями в рассматриваемой цепи. На фиг. 45 построен равнобедренный треугольник, основание которого равно активному сопротивлению R , а высота — индуктивному сопротивлению ωL при собственной частоте контура ω . Из соотношения (5.19) вытекает, что угол δ равен половине угла у вершины этого треугольника. Боковые стороны треугольника, на основании теоремы Пифагора и соотношения (5.14), равны $\sqrt{L/C}$. Таким образом, построив равнобедренный треугольник с основанием, равным активному сопротивлению

контура, и боковыми сторонами, равными его волновому сопротивлению, легко определить фазовый угол δ . Величины этих сопротивлений всегда бывают известны. В большинстве случаев волновое сопротивление значительно больше активного и, следовательно, угол δ оказывается малым. Воспользовавшись формулой (5.15), мы получим в соответствии с фиг. 45 аналитическое соотношение

$$\cos \delta = \frac{\omega L}{\sqrt{L/C}} = \frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1 - \left(\frac{R}{2} \right)^2 \frac{C}{L}}, \quad (5.24)$$

в котором выражение для ω взято из формулы (5.14).

Умножив все стороны треугольника на I , получим треугольник, основание которого равно амплитуде напряжения на активном сопротивлении RI , одна боковая сторона равна амплитуде напряжения на индуктивности, а другая — амплитуде напряжения на конденсаторе [см. формулы (5.20) и (5.23)]. Как видно из фиг. 46, в новом треугольнике сохраняются правильные соотношения не только между величинами, но и между фазами трех напряжений E_L , E_C и E_R [ср. формулы (5.13), (5.20) и (5.23)], а именно: напряжение E_L опережает напряжение E_C на угол, немного больший 90° , а напряжение E_C отстает от него на такой же угол. Этот режим свободных колебаний отличается от вынужденного режима, при котором, как известно, вектор напряжения на индуктивности и вектор напряжения на емкости составляют с вектором тока угол, точно равные 90° . Причина этого различия заключается в том, что свободные токи и напряжения затухают по показательному закону, вследствие чего три упомя-



Фиг. 45.

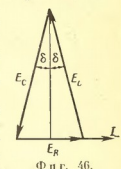
Гл. 5. Свободные токи и напряжения в колебательных контурах

57

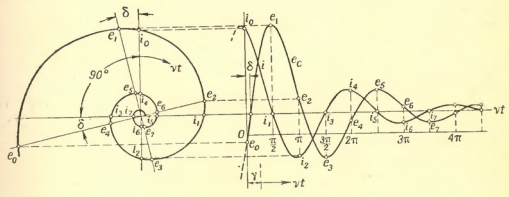
нутых выше вектора образуют замкнутый треугольник без вектора внешнего приложенного напряжения.

В реальных цепях активное сопротивление не всегда сосредоточено в конденсаторе и в особенности не индуктивной катушки. Внутри этих элементов находится, по крайней мере, часть активного сопротивления контура. Векторная диаграмма, изображенная на фиг. 46, позволяет определить напряжение между любыми двумя точками колебательного контура, если известно, как распределится активное сопротивление между его элементами. Искомое напряжение равно расстоянию от вершины треугольника до некоторой точки его основания, соответствующей распределению активных сопротивлений между элементами контура.

Свободные напряжения и токи в колебательном контуре изменяются не только периодически по законам синуса и косинуса, как это показано на векторной диаграмме фиг. 46, но и затухают по показательному закону. Оба вида изменения этих величин можно представить спиральной диаграммой (фиг. 47). В соответствии с периодическим изменением тока или напряжения происходит вращение их векторов. В то же время их амплитуды уменьшаются по показательному закону, так что конец вектора описывает логарифмическую спираль.



Фиг. 46.



Фиг. 47.

Представив в прямоугольных координатах зависимость проекции соответствующего вектора на вертикальную ось от его полярного угла, получим кривые изменения тока и напряжения во времени. Такие кривые для тока i и напряжения на конденсаторе e_C построены в некоторых произвольных масштабах, изображены на фиг. 47, причем e_C отстает от i на $90^\circ + \delta$. Соответствующие мгновенные значения тока и напряжения на полярной и прямоугольной диаграммах обозначены одинаково.

Из диаграммы видно, что максимумы и минимумы e_C всегда наступают в тот момент, когда i обращается в нуль. Обратное соотношение не имеет места, так как e_C обращается в нуль, спустя время $2\pi/\omega$ после того, как величина i прошла через свой максимум. Кривые на фиг. 47 построены по упрощенному выражению для тока (5.13). Если бы мы попытались учесть начальную фазу тока γ и в соответствии с более общим выражением (5.12), то для этого было бы достаточно сдвинуть начало времени вправо на величину γ , как показано на фиг. 47.

При определении максимального напряжения на конденсаторе (см. схему на фиг. 42) следует иметь в виду, что максимум наступает, спустя

58

1. Простые электрические цепи

четыре периода после момента отключения источника, т. е. при

$$\omega t = \frac{\pi}{2}. \quad (5.25)$$

При относительно малом активном сопротивлении можно пренебречь углом δ по сравнению с $\pi/2$ и воспользоваться упрощенным выражением (5.15) для определения собственной частоты контура ω . В таком случае, подставив в выражение (5.23) значение t из формулы (5.25), получим

$$E_{\text{макс}} = I \sqrt{\frac{L}{C}} e^{-(\pi/4) R \sqrt{C/L}}. \quad (5.26)$$

Следовательно, если волновое сопротивление значительно больше активного сопротивления отключаемой цепи, то максимальное напряжение, появившееся на конденсаторе после отключения, превышает напряжение источника и число раз, равное отношению волнового сопротивления к активному. Напряжение при отключении останется в пределах предельных только при большой емкости конденсатора. Как видно из соотношения (5.26), активное сопротивление может существенно уменьшить напряжение на конденсаторе лишь в тех случаях, когда его величина приближается к величине волнового сопротивления. При равенстве этих сопротивлений напряжение на конденсаторе снижается приблизительно на 45%.

§ 3. Параметры цепи. Если включить параллельно обмотке возбуждения с индуктивностью $L = 42$ гн (см. гл. 1) конденсатор емкостью $C = 20$ мкф, то получится контур с собственной частотой

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{42 \cdot 20 \cdot 10^{-6}}} = 65 \text{ сек.}^{-1}, \text{ или } f = 10,3 \text{ гц,}$$

и волновым сопротивлением

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{42}{20 \cdot 10^{-6}}} = 775 \text{ ом.}$$

Если принять активное сопротивление этого контура $R = 11$ ом, то выключение тока $I = 10$ а вызовет напряжение на конденсаторе

$$E_{\text{макс}} = 10 \cdot 775 \cdot e^{-(\pi/4) (11/775)} \approx 7750 \text{ в.}$$

Таким образом, несмотря на то, что был выбран конденсатор немалой емкости, все же амплитуда напряжения на нем во много раз превышает рабочее напряжение, равное $RI = 11 \cdot 10 = 110$ в. Затухание оказалось здесь весьма малым.

В то время как в цепях постоянного тока нередко встречаются индуктивности от 1 до 400 гн, в цепях переменного тока их обычно берут очень малыми во избежание больших падений напряжения при прохождении рабочего тока. Так, например, в контуре, состоящем из катушки емкостью 2 мкф и зашунтированной его реактивной катушки с индуктивностью $L = 5$ мгн, могут возникнуть свободные колебания с частотой

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}} = 10000 \text{ сек.}^{-1}, \text{ или } f = 1600 \text{ гц,}$$

которая во много раз превышает нормальную рабочую частоту 50 или 60 гц. Соответствующее этим параметрам волновое сопротивление контура равно

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-6}}} = 50 \text{ ом.}$$

Наконец, если очень малые катушки (например отключающие катушки выключателей) с индуктивностью $L = 0,1$ мгн взаимодействуют с малыми