

УДК 621.3.015.4

ФИЗИЧЕСКОЕ ТОЛКОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА, ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Н. Д. Бирюк, Ю. Б. Нечаев, В. Н. Финько

Воронежский государственный университет

На основании только физических соображений с использованием простых энергетических преобразований рассмотрено явление накачки энергии в параметрический контур частного вида. Выделено два крайних случая: синхронный и асинхронный. В первом случае она минимальна, во втором — максимальна. Предлагаемый подход допускает обобщение на сложные случаи, которые трудно поддаются физической интерпретации

Явление параметрического резонанса заключается в том, что в электрическом колебательном контуре с периодически изменяющимися реактивностями свободный процесс беспредельно возрастает (контур неустойчив по Ляпунову). Исследование этого явления сопряжено с большими математическими трудностями [1—3], которые не преодолены полностью до настоящего времени, так что, можно сказать, практические потребности в анализе этого явления остаются в силе. Как известно, адекватный математический аппарат при исследовании радиофизических проблем имеет непреходящее значение. Обычно в физических задачах составления математических уравнений, промежуточные и конечные результаты сопровождаются достаточно простым физическим толкованием. Тогда получается полная, логически связанная картина, согласующаяся с нашим физическим мировоззрением. В таких случаях обычно возникают идеи, способствующие развитию и обобщению полученного решения.

В случае параметрического резонанса с физическим толкованием возникают характерные трудности. Дело в том, что это весьма тонкое явление, связанное с понятием неустойчивости по Ляпунову линейных систем. В таких случаях неустойчивость достигается за счет малых накоплений на бесконечном интервале времени. Как малые накопления, так и бесконечный интервал неудобны для наглядного представления и

физического толкования. Поэтому исследование параметрического резонанса часто ограничивают формальными математическими задачами. Обычно они бывают идеализированными, так что при сопоставлении с практикой возникают трудности. В данной публикации делается попытка выделить характерный частный случай параметрического резонанса и дать его качественный анализ с помощью максимально простого математического аппарата, опираясь главным образом, на физические закономерности.

Рассмотрим последовательный резонансный контур, представленный на рис. 1. Сначала в методических целях предположим, что элементы контура C , L , R постоянны. Как известно, свободный процесс заключается в том, что энергия, запасенная в реактивностях, постоянно перекачивается из емкости в индуктивность и наоборот, при этом часть электромагнитной энергии теряется в активном сопротивлении, преобразуясь в теплоту. При этом ток изменяется во времени по закону «затухающей косинусоиды»

$$i = I_m e^{-\alpha t} \cos(\omega_c t + \varphi),$$

где $\alpha = R/2L$ — коэффициент затухания, $\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ — частота свободных колебаний, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ — собственная частота

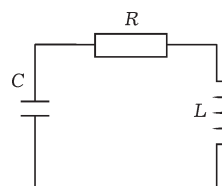


Рис. 1. Последовательный резонансный контур

контура. Мгновенные энергии, запасенные соответственно в емкости и индуктивности равны

$$W_c = \frac{q^2}{2C} = \frac{Cu_c^2}{2}, W_L = \frac{\Phi^2}{2L} = \frac{Li_L^2}{2}, \quad (1)$$

где q — заряд конденсатора; u_c — напряжение на конденсаторе; Φ — магнитный поток, сцепляющийся с катушкой индуктивности; i_L — ток индуктивности (в данном случае совпадающий с током контура i). Обе энергии колеблются во времени с удвоенной частотой $2\omega_c$ свободных колебаний, постепенно уменьшаясь. Как видно, свободный процесс в обычном контуре при $R > 0$ всегда затухающий, т.е. обычный контур всегда асимптотически устойчив по Ляпунову. Если же реактивности изменяются во времени по периодическим законам $C(t+T) = C(t)$, $L(t+T) = L(t)$, где T — период, то свободный процесс может быть как затухающим, так и беспредельно возрастающим. В последнем случае контур неустойчив по Ляпунову и имеет место параметрический резонанс. Возможен и промежуточный случай, когда контур не является ни затухающим, ни беспредельно возрастающим, т.е. его ток всегда меньше по модулю некоторого постоянного значения. В таком случае контур устойчив (неасимптотически) по Ляпунову. Разделить эти качественно разные явления — сложная задача как в математическом, так и в физическом отношении. Параметрический резонанс проявляется наиболее сильно, когда реактивности изменяются скачком. Рассмотрим несколько частных случаев.

Пусть емкость уменьшается скачком в тот момент, когда запасенная в ней энергия максимальна и равна полной энергии, запасенной в контуре. Через четверть периода конденсатор будет незаряжен и запасенная в нем энергия равна нулю, в этот момент конденсатор скачком увеличивается до прежнего значения. При этом запасенная в контуре энергия не изменится. И так все периодически повторяется, в результате чего энергия вкладывается в контур через емкость два раза за период. При анализе этого явления очень важно выбрать подходящее выражение для энергии. Поэтому рассмотрим два случая.

Проанализируем выражение

$$W_c = \frac{q_m^2}{2C}, q = \text{const.} \quad (2)$$

Имеется в виду, что $q_m = Cu_m = \text{const}$ в момент скачкообразного изменения емкости. Тогда очевидно, что если емкость скачкообразно уменьшается, то амплитуда напряжения скачкообразно увеличивается, так что их произведение остается постоянным.

Теперь рассмотрим выражение

$$W_c = \frac{Cu_m^2}{2}, u_m = \text{const.} \quad (3)$$

В данном случае $u_m = \frac{q_m}{C} = \text{const}$. Если C скачком уменьшается, то и q_m скачком уменьшается, так что дробь q_m/C остается постоянной.

Выражение (2) особых возражений при реализации не вызывает. Напряженность между пластинами при стандартных конструкциях конденсаторов вычисляется в предположении, что его пластины бесконечные, равномерно заряженные, тогда

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0 S}.$$

где S — площадь пластины конденсатора.

Как видно, напряженность электрического поля E не зависит от расстояния между пластинами d . Напряжение между пластинами равно $u = Ed$. Если предположить, что емкость уменьшается скачком за счет скачкообразного увеличения расстояния d между пластинами, то и напряжение между пластинами увеличивается скачком. При этом q , E остаются постоянными. Если предположить, что q изменится скачком, то для этого потребуется бесконечно большой ток

$i = \frac{dq}{dt}$. Таким образом, выражение (2) вполне приемлемо для реализации.

Рассмотрим выражение (3). Здесь, если C уменьшается скачком, то и q уменьшается скачком, а вместе с ним E уменьшается

скачком. При этом получится, что $i = \frac{dq}{dt} = \infty$.

Если предположить, что емкость уменьшается увеличением расстояния между пластинами d при $u = \text{const}$, то должна умень-

шаться и напряженность $E = u/d$, и заряд q . По мере раздвижения пластин заряд должен уменьшаться за счет тока, протекающего между пластинами. При скачкообразном увеличении d ток равен бесконечности. Таким образом, при скачкообразном изменении емкости, выражение (3) не может быть принято к рассмотрению, так как при реализации требуется выполнение нереальных условий. Таким образом, выражение (2) и (3) равноправны в обычном контуре, а в параметрическом контуре справедливым остается выражение (2).

Энергию, запасенную в контуре, можно увеличивать за счет скачкообразного изменения индуктивности. Здесь тоже возможны два варианта. Первый связан с формулой для запасенной в индуктивности энергии, когда она максимальна.

$$W_L = \frac{\Phi_m^2}{2L}, \Phi_m = \text{const}. \quad (4)$$

индуктивность скачком уменьшается, тогда энергия контура скачком увеличивается. При этом $\Phi_m = LI_m = \text{const}$, т.е. амплитуда тока в индуктивности скачком увеличивается. В

таком случае э.д.с. индуктивности $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$ не возникает. Здесь принципиальных трудностей при реализации не видно. Как известно, индуктивность соленоида равна

$$L = \mu\mu_0 n^2 V, \quad (5)$$

где n — плотность намотки (1/см — число витков на единицу длины соленоида), μ — магнитная проницаемость пространства внутри соленоида, V — объем пространства внутри соленоида. Индуктивность можно менять движением, например, железного или медного сердечника в соленоид. В первом случае индуктивность увеличивается, во втором — уменьшается. Итак, когда энергия в индуктивности максимальна, железный сердечник выдвигаем (или медный — вдвигаем), индуктивность уменьшается, а ее энергия (4) увеличивается. Через четверть периода железный сердечник вдвигаем, в это время энергия индуктивности равна нулю, так что запасенная энергия в контуре не изменится.

Если таким образом индуктивность будет изменяться периодически, то запасен-

ная энергия в контуре будет увеличиваться два раза за период.

Теперь рассмотрим выражение

$$W_L = \frac{LI_m^2}{2}, I_m = \text{const}. \quad (6)$$

Имеем $I_m = \frac{\Phi_m}{L} = \text{const}$. Значит, если L

скачком уменьшается, то Φ_m тоже скачком уменьшается так, чтобы выполнялось условие $\Phi_m/L = \text{const}$. Но если Φ_m скачком уменьшается, то возникает бесконечная э.д.с.

индукции, $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_m}{dt} = \infty$. В таком случае

по закону Ленца сердечник соленоида нельзя ни вдвинуть, ни выдвинуть. При реализации возникают непреодолимые трудности. Таким образом, равноправные для обычного контура выражения (4) и (6), в параметрическом контуре становятся неравноправными. При реализации изменения индуктивности выполняется только формула (4).

Из изложенного выше проясняется механизм вложения энергии в контур путем изменения реактивностей. Оценим соответствующие эффекты качественно. При изменении емкости начальная (до изменения емкости) и конечная (после изменения емкости) энергии легко находятся по формуле (2):

$$W_{c1} = \frac{q_m^2}{2C}, W_{c2} = \frac{q_m^2}{2(C - \Delta C)}. \quad (7)$$

Отсюда находим вклад энергии в контур за один акт уменьшения емкости:

$$\Delta W_c = W_{c2} - W_{c1} = \frac{q_m^2}{2C} \cdot \frac{\Delta C}{C - \Delta C}.$$

Для практики оказывается важным случай $\Delta C \ll C$ при высокочастотном контуре $\omega_c \approx \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Тогда

$$\Delta W_c \approx \frac{q_m^2}{2C} \cdot \frac{\Delta C}{C} = \frac{I_m^2}{2\omega_0^2} \cdot \frac{\Delta C}{C} = \frac{1}{2} I_m^2 \rho^2 \Delta C, \quad (8)$$

где $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ — характеристическое сопротивление контура. За период свободного процесса в контур вкладывается две примерно такие порции энергии, т.е.

$$W_T = 2W_c = I_m^2 \rho^2 \Delta C.$$

Это — энергия, вкладываемая в контур за период. Теперь подсчитаем энергию, теряемую за период в сопротивлении R за счет преобразования части электромагнитной энергии в теплоту:

$$W_R = \frac{I_m^2 R}{2} T = \frac{I_m^2 R}{2} \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi I_m^2 R \sqrt{LC}. \quad (10)$$

Параметрический резонанс будет иметь место, если $W_T > W_R$ или

$$\frac{L}{C} \Delta C > \pi R \sqrt{LC}, \quad \frac{\Delta C}{C} > \frac{\pi}{Q}, \quad (11)$$

где $Q = \frac{\rho}{R}$ — добротность контура. Получено простое условие параметрического резонанса: относительное изменение емкости по порядку должно быть больше добротности в минус первой степени.

Проведем аналогичную оценку при изменении индуктивности. По формуле (4) получаем запасенную в индуктивности энергию до и после уменьшения индуктивности

$$W_{L1} = \frac{\Phi_m^2}{2L}, \quad W_{L2} = \frac{\Phi_m^2}{2(L - \Delta L)}.$$

При этом получается следующее вложение энергии в контур:

$$\Delta W_L = W_{L2} - W_{L1} = \frac{\Phi_m^2}{2L} \frac{\Delta L}{L - \Delta L} = \frac{LI_m^2}{2} \frac{\Delta L}{L - \Delta L}.$$

В случае $\Delta L \ll L$

$$\Delta W_L \approx \frac{I_m^2}{2} \Delta L = \frac{1}{2} I_m^2 \Delta L. \quad (12)$$

За период контур получит энергию

$$\Delta W_T = 2\Delta W_L = I_m^2 \Delta L. \quad (13)$$

Параметрический резонанс реализуется при условии $\Delta W_T > \Delta W_R$ или

$$\Delta L > \pi R \sqrt{LC} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta L}{L} > \frac{\pi}{Q}. \quad (14)$$

Как и в случае емкости, относительное изменение индуктивности должно быть по порядку величины больше обратной добротности контура. Получилось простое условие параметрического резонанса в случае скачкообразного изменения индуктивности.

Мы рассмотрели случаи, когда емкость скачкообразно уменьшалась именно в тот момент, когда запасенная в ней энергия мак-

симальна, точно так же уменьшалась и индуктивность в том момент, когда запасенная в ней энергия максимальна. Аналогично можно рассмотреть случаи скачкообразного увеличения емкости и индуктивности в тот момент, когда запасенные в них энергии максимальны. Тогда получатся такие же приращения энергии, как и раньше по выражениям (9) и (13) только со знаками «минус», т.е. энергия не вкладывается в контур, а отбирается от него.

Теперь можно, используя полученные сведения, рассмотреть случай одновременного изменения обеих реактивностей. Здесь возможно много вариантов. Ограничимся рассмотрением двух наиболее характерных случаев: а) $\rho = \text{const}$, б) $\omega_0 = \text{const}$. Случай а) равнозначен $\frac{L(t)}{C(t)} = \text{const}$, поэтому

такое изменение реактивностей естественно назвать синхронным. Случай б) равнозначен условию $L(t) \cdot C(t) = \text{const}$, такое изменение реактивностей будем называть асинхронным.

Рассмотрим синхронное изменение реактивностей $L(t) = \text{const} C(t)$, $\Delta L = \text{const} \Delta C$. Допустим, что емкость и индуктивность уменьшаются тогда, когда запасенная в емкости энергия максимальна. Тогда в контур вносится энергия (8) за счет изменения емкости

$$\Delta W_c = \frac{1}{2} I_m^2 \rho^2 \Delta C = \frac{1}{2} I_m^2 L \frac{\Delta C}{C}. \quad (15)$$

Через четверть периода, когда энергия контура перекачается в индуктивность, индуктивность и емкость одновременно, скачком увеличиваются. Тогда энергия выкачивается из контура за счет изменения индуктивности. Величина этой энергии определяется по формуле (15), со знаком «минус»:

$$\Delta W_L = -\frac{1}{2} I_m^2 \Delta L = -\frac{1}{2} I_m^2 L \frac{\Delta L}{L} = -\frac{1}{2} I_m^2 L \frac{\Delta C}{C}.$$

Получилось, что энергия (12), которая раньше была вложена в контур, через четверть периода согласно (13) была выкачана из контура. Это значит, что при синхронном изменении реактивностей параметрический контур неустойчивым быть не может, в таком случае параметрический резонанс не возникает. Можно показать с помощью

второго метода Ляпунова, что это заключение справедливо при любом, одном и том же законе изменения во времени емкости и индуктивности. Следовательно, если контур возбудился из-за изменения во времени одной (допустим, емкости), то его можно стабилизировать, изменяя синхронно во времени другую реактивность (индуктивность).

Рассмотрим случай асинхронного изменения реактивностей $C(t)L(t) = \text{const}$. Име-

ем $L(t) = \frac{\text{const}}{C(t)}$, $\Delta L = -\text{const} \frac{\Delta C}{C^2}$. В этом

случае формулы (8) и (12) могут быть приведены к виду

$$\Delta W_C = \frac{1}{2} I_m^2 \rho^2 \Delta C = \frac{1}{2} I_m^2 L \frac{\Delta C}{C},$$

$$\Delta W_L = \frac{1}{2} I_m^2 \Delta L = \frac{1}{2} I_m^2 L \frac{\Delta L}{L} = -\frac{1}{2} I_m^2 L \frac{\Delta C}{C}.$$

Получается, что когда емкость убывает, индуктивность возрастает. Если емкость накачивает энергию в контур, то в этот момент индуктивность выкачивает энергию из контура. Результат зависит от соотношения запасенных энергий в обеих реактивностях в этот момент. В нашем случае изменения реактивностей во времени особые, поэтому следует ожидать и особого результата. Пусть в некоторый момент времени вся энергия контура сосредоточена в емкости, при этом емкость скачком уменьшается, вследствие чего энергия в контур накачивается. В это же время индуктивность скачком увеличивается, за счет этого, вообще говоря, энергия должна выкачиваться из контура. Но в этот момент энергия в индуктивности равна нулю, поэтому выкачивания не происходит. Через четверть периода вся энергия контура будет сосредоточена в индуктивности, в этот момент индуктивность скачком уменьшается, а емкость скачком увеличивается. За счет того, что индуктивность уменьшается, энергия накачивается в контур. При увеличении емкости энергия должна выкачиваться из контура, но в данный момент времени энергии в емкости нет, поэтому выкачивания энергии не происходит. И далее все периодически повторяется. Получается, что энергия через каждые четверть периода накачивается в контур то емкостью, то индуктивностью. При асинхронном

изменении реактивностей контур может быть либо неустойчивым, либо устойчивым, но эта устойчивость по сравнению с другими аналогичными случаями наиболее близка к неустойчивости. Это утверждение нуждается в пояснении. Допустим, при некоторых законах изменения реактивностей $L(t)$, $C(t)$ имеем асинхронное изменение, причем можно вводить задержку или упреждение во времени в каком-нибудь из этих законов, скажем, для емкости $C(t+t_0)$, t_0 можем задавать произвольно, т.е. сам закон изменения емкости не меняется, но может быть сдвинут во времени, при $t_0 = 0$ получается асинхронное изменение. Теперь высказанное выше утверждение можно сформулировать точно. Если при асинхронном изменении реактивностей ($t_0 = 0$) контур устойчив, то при любом t_0 он будет тем более устойчив. Если при $t_0 = 0$ контур неустойчив, то, вообще говоря, при любом t_0 ничего нельзя сказать об устойчивости контура.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение сложной физической задачи, как правило, представляет собой своеобразный сплав из выстроенной логической последовательности физических и математических закономерностей. Удельный вес тех и других может быть разным, но в идеале для каждой задачи он должен быть вполне определенным. Удивительная гармония между физическими и математическими подходами содержится в творчестве академика Л. И. Мандельштама [4]. В частности, в статье [5] анализируется параметрический контур с изменяющейся во времени емкостью с позиций энергетики. Интересно отметить, что в радиофизической литературе незаслуженно мало внимания уделяется параметрическому контуру с обеими изменяющимися во времени реактивностями, хотя очевидно, что в таком случае потенциальные возможности контура заметно расширяются. Именно эта задача рассмотрена в настоящей статье, причем решалась она исключительно физическими методами. Они дали возможность, по-видимому, впервые выделить характерные, синхронные и асинхронные, случаи изменения реактивностей. Области применимости физических и матема-

тических решений различны, они взаимно дополняют друг друга и позволяют, как бы рассмотреть проблему с разных позиций. Иллюстрацией к этому может быть параметрический контур по рис. 1, в котором реактивности постоянны, а активное сопротивление $R = R(t) > 0$ может изменяться во времени по любому закону без каких-либо ограничений, оставаясь всегда положительным. Решение этой задачи математическими методами не получается. С физической точки зрения решение находится элементарно. Поступления энергии в контур нет, в то же время расход ее, т.е. преобразование в теплоту в активном сопротивлении, не прекращается. Следовательно, такой контур асимптотически устойчив. Бывает и наоборот, т.е. полезная информация извлекается только после решения сложной математической задачи. Подход и результаты настоящей статьи могут быть обобщены в двух направлениях: применительно к более сложным параметрическим радиоцепям и применительно к нелинейным радиоцепям. Суще-

ствует, к сожалению, мало известный в радиофизических кругах принцип линейного включения, утверждающий, что любое решение нелинейной системы может быть представлено как решение эквивалентной линейной системы. Здесь под линейной системой подразумевается именно параметрическая система.

ЛИТЕРАТУРА

1. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. — М.: Наука, 1972. — 718 с.
2. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.
3. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Факториал, 1997. — 304 с.
4. Академик Л.И. Мандельштам. Лекции по теории колебаний. — М.: Наука, 1972. — 470 с.
5. Мандельштам Л.И. О возбуждении колебаний в электрической колебательной системе при помощи периодического изменения емкости. — Полное собрание трудов. — Т. 2. — Изд. АН СССР, 1947. — С. 63—69.